****

CÁLCULO INTEGRAL





SESIÓN 2: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN 1.

**COMPETENCIA:** Interpretar y aplicar los métodos de sustitución e integración por partes para resolver integrales

METODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método de integración por sustitución o por cambio de variable se basa en realizar un reemplazo de variables adecuado que permita convertir el integrando en algo sencillo con una integral o antiderivada simple. En muchos casos, donde las integrales no son triviales, se puede llevar a una integral de tabla para encontrar fácilmente su primitiva. Este método realiza lo opuesto a la regla de la cadena en la derivación.

La integración por sustitución de variables, es uno de los métodos más importantes del cálculo integral, el éxito depende de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de la variable.

El método consiste en:

1. Elegir una nueva variable (por ejemplo: u) de acuerdo con el sitio que indique una fórmula de la tabla de integración inmediata.

2. Hallar la derivada de dicha variable (si es u , calcular du ).

3. Despejar el diferencial original en esta nueva ecuación

4. Sustituir en una nueva integral y solucionarla.

5. Una vez calculada la nueva integral reemplazar la nueva variable por la función sustituida en el paso 1.

Procedimiento práctico

Supongamos que la integral por resolver es:

Podemos evidenciar rápidamente que al derivar el argumento de la función coseno obtenemos algo similar a su coeficiente (como es una función cuadrática al derivarse obtendremos una función lineal que como podemos notar es coeficiente de la función coseno).

Por lo tanto escogemos la nueva variable u:

Derivamos la nueva variable (u) con respecto a la variable inicial (x)

Despejamos dx:

Por lo tanto en la integral reemplazamos , dx por du/4x y solucionamos la nueva integral, esto es:

Sin embargo debemos recordar que la integral original debía solucionarse con respecto a la variable x, por lo tanto reemplazamos la u por lo que era originalmente

(u=

Por lo tanto:

**Relación entre el método de integración por sustitución y la regla de la cadena en derivación:**

Para entender la relación entre el método de integración por sustitución y la regla de la cadena en derivación vamos a realizar inicialmente la comprobación de la solución obtenida en el ejemplo anterior:

Recordemos que la integral indefinida es el conjunto de todas las antiderivadas de una función, por lo tanto al derivar el resultado obtenido en la integral obtendremos el integrando, esto es:

Para derivar esta expresión es necesario aplicar la regla de la cadena:

Para el ejemplo:

Obteniendo el integrando original.

*Note que los términos resaltados en rojo corresponden a la derivada interna de la función básica, esa precisamente es la que en la técnica de sustitución llamamos*

**Ejemplo 2:**

* Escogemos como nueva variable u:

Nota: En el caso de funciones polinómicas note que u debe tener un grado por encima del coeficiente de la función. (en este caso el argumento de la función exponencial es una función cúbica y el coeficiente es una función cuadrática)

* Calculamos la derivada de u:
* Despejamos dx:
* Sustituimos en la integral original:
* Simplificamos y solucionamos la nueva integral:
* Reemplazamos u por la función que originalmente representaba:

Por lo tanto:

**Ejemplo 3:**

* Escogemos como nueva variable u:
* Calculamos la derivada de u:
* Despejamos dz:
* Sustituimos en la integral original:
* Simplificamos y solucionamos la nueva integral
* Reemplazamos u por la función que originalmente representaba:

En síntesis el proceso que lleva el método de sustitución es:

* Escoger la sustitución adecuada (nueva variable u)
* Derivar la nueva variable (derivar u)
* Despejar el diferencial original (p.ej: despejar dx)
* Sustituir en la integral original
* Simplificar y solucionar la nueva integral
* Reemplazar la nueva variable (u) por la función que originalmente representaba.

INTEGRACION POR PARTES

Se basa en la regla de derivación del producto de dos funciones derivables en un dominio común.

Sean dos funciones derivables en un dominio común. Entonces:

 (1)

**DEMOSTRACIÓN:**

Recordemos la regla de derivación de productos:

Dx[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)

Trabajando una notación más acorde con el enunciado (1)

Despejando u dv:

Integrando ambos términos de la ecuación:

Obtenemos:

**PROCEDIMIENTO**

El procedimiento por seguir en este método es:

* Relacionar la integral dada con la fórmula del método parar ello descomponemos el integrando en dos factores u y dv de tal modo que el dv contenga al diferencial dx .
* Calcular la derivada de u y la antiderivada de dv
* Sustituir aplicando la fórmula (1)

**Las condiciones para aplicar este método son:**

* En el integrando aparece el producto de dos funciones: u y v’ tal que u sea derivable, y a partir de v’ sea posible obtener v
* La integral que resulta al usar la fórmula del método () debe ser de igual o menor complejidad que la integral original.

EJEMPLO 1:

Calcular

Podemos evidenciar que se tiene el producto de dos funciones (una polinómica y una exponencial), por lo tanto escogemos u y dv

Recordemos que debemos generar ∫vdu con un grado de dificultad menor al de la integral original por lo tanto tomamos como u a la función polinómica de tal modo que al derivarla genere una función de menor grado que el original (Esta selección de u se tomará para la mayoría de integrales que contengan funciones polinómicas)

Esto es:

Calculamos du (derivando u) y v (antiderivando dv)

Aplicamos la fórmula (1) y solucionamos la nueva integral

Note que la integral correspondiente a es más sencilla que la integral original (de hecho es directa)

**Ejemplo 2:**

Calcular

* Escogemos u y dv:
* Calculamos du (derivando u) y v (antiderivando dv)

Note que para calcular debe aplicarse la técnica de sustitución

* Aplicamos la fórmula (1)

*Note que la integral correspondiente a es más sencilla que la integral original, en este caso es necesario aplicar de nuevo la técnica de integración por partes debido a que debe calcularse la integral de otro nuevo producto de funciones.*

Para simplificar un poco el cálculo llamemos A a la integral generada, esto es:

A=

La nueva sustitución sería:

Por lo tanto

A=

Reemplazando A en la integral original tenemos:

NOTA: En la gran mayoría de los casos se deben aplicar el método de integración en una misma integral tantas veces como el orden de la función polinómica que contenga.

EJEMPLO 3: INTEGRALES CON FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Calcular:

En este caso la sustitución por realizar es la siguiente:

Esto obedece a que al derivar la función logaritmo natural se obtiene una función polinómica (recuerde: )

De ahí obtenemos du y v:

Aplicando la fórmula (1)

En síntesis el proceso del método de integración por partes consiste en:

* + Identificar la sustitución adecuada (escoger u y dv)
	+ Calcular du y v (mediante la derivación de u y la antiderivación de dv respectivamente)
	+ Solucionar la nueva integral

Consejos para trabajar de la mejor manera la técnica de integración por partes:

* + Al escoger la sustitución tomar u como la función polinómica presente en la integral (excepto en el caso en que dicha función se multiplique por una función logaritmo natural)
	+ Tener en cuenta que en la mayoría de los casos al calcular la antiderivada de dv debe aplicarse la técnica de integración por sustitución vista al inicio de la sesión.